

第一章 信号与系统概述

一. def 信号、系统

① 信息 $H = -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log_2 p(x_i)$
 $= -E[p(x_i)]$ (信息熵)

② 信号: 信息的载体(光信号、电信号、声信号等)

③ 系统: 相互关联的事物组合成具有特定功能的整体
 (输入、输出)

二. 信号的分类

能写出表达式 无法写出表达式

1. 确定信号/随机信号

又分为完全不确定/有某种潜在规律

(白噪声) (语音信号、雷达信号等)

△ 平稳信号/非平稳信号

△ 信号处理

传统 模拟信号: 傅立叶变换 自变量与信号参量取值连续

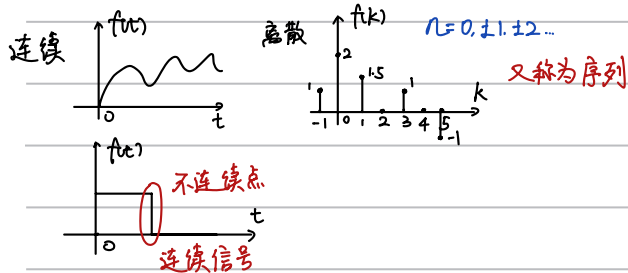
数字信号: 快速傅立叶变换 (FFT) 自变量与信号参量取值离散

2. 连续信号和离散信号

函数值

连续信号: 除去某些不连续点, 对于任意自变量能得到确定
 针对时间, 定义域连续/离散

离散信号: 采样



(傅立叶分析) (傅立叶变换)
 $f(t) = f(t+mT)$ T : 最小正周期
 $f(k) = f(k+mN)$ N : 最小正整数

3. 周期信号/非周期信号 (定义在 $(-\infty, \infty)$ 上) 数

连续信号:

① 单个信号: 正弦信号、复指数信号 ($e^{j\omega t}$) 均为
 周期信号, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

② 多个信号 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

① $f_1(t)$, $f_2(t)$ 中有一个非周期, 另一个周期, 则一定非周期

② 非周+非周 可能为周期: $f_1(t) = \sin t + \frac{1}{t}$, $f_2(t) = \sin t - \frac{1}{t}$

② 周+周 未必为周期, 看是否可化为最简整数比

离散信号:

需要的周期个数

① 单个信号 当 $\frac{2\pi}{\omega}$ 可化为 $\frac{N}{m}$ 时, N 为最小周期, m 为连续化时

② 多个信号

① 周+周 一定为周期 N 为 N_1, N_2 最小公倍数

② 周+非周 一定非周期

③ 非周+非周 不定 ($\sin(\pi k) + \frac{1}{k}$) + ($\sin(\pi k) - \frac{1}{k}$)

4. 实信号/复信号

信号函数值是实数/复数

复信号: e^{st} , $s = \sigma + j\omega$

5. 能量信号/功率信号 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$

连续: (1) 能量 $E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$ 实信号可写作 $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$

(2) 功率 $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$ 能量 = 功率 $\cdot T$, ($T \rightarrow \infty$)

$E < \infty$, 能量(有限)信号, 此时 $P = 0$

$P < \infty$, 功率(有限)信号, 此时 $E = \infty$

离散: $E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N |f(k)|^2$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |f(k)|^2$$

非能量非功率信号: $E \rightarrow \infty$, $P \rightarrow \infty$

△判别

时限信号 $\int_a^b \text{有限值 } dt$

可积信号为时限, 则为能量信号

$\sin t$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \sin^2 t \, dt$

与 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt$ 等价 (周期信号)

① $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, $P = \frac{A^2}{2}$, 功率信号

② $f(t) = A$, $P = A^2$, 功率信号

③ $f(t) = \begin{cases} A & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$, 功率信号

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \, dt = \frac{1}{T} \cdot T \cdot A^2 = \frac{A^2}{2}$$

④ 周期信号通常为功率信号

功率与每个周期内功率相等, $P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$

信号的大小 — 信号规范量 (Norm)

模可积、模可和

(连续) (离散)

有界连续信号 $x(t)$

满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt < \infty$, 则称为模可积

有界离散信号 $x(k)$

满足 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty$, 则称为模可和

def 若 $x(t)$ 模可积

则定义一阶规范量 $\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt$

$$\|x(k)\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|$$

若 $x(t)$ 有界但非模可积

则定义一阶规范量 $\|x(t)\|_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)| \, dt$

$$\|x(k)\|_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |x(k)|$$

def 二阶规范量

若 $x(t)$ 模可积, 则定义二阶规范量

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt} \text{ 能量}$$

$$\|x(k)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2} \text{ 功率}$$

若 $x(t)$ 有界但非模可积, 则定义二阶规范量

$$\|x(t)\|_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 \, dt}$$

$$\|x(k)\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |x(k)|^2}$$

(t) $\longrightarrow$ (f)

能量信号 $\xrightarrow{\text{维纳-辛钦}} \text{能量谱}$

功率信号 $\xrightarrow{\text{定理}} \text{功率谱}$

6. 一维信号/多维信号

“维度” — 自变量个数

7. 因果信号/反因果信号

$t=0$ 时接入系统的信号

三. 信号的基本运算

1. 加法, 乘法

定义域组合

$$f_1(k) = \begin{cases} 2^k & k < 0 \\ k+1 & k \geq 0 \end{cases} \quad f_2(k) = \begin{cases} 0 & k < -2 \\ 2^{-k} & k \geq -2 \end{cases}$$

$$f(k) = f_1(k) \cdot f_2(k) = \begin{cases} 0 & k < -2 \\ 1 & -2 \leq k < 0 \\ 2^{-k}(k+1) & k \geq 0 \end{cases}$$

2. 平移

$$f(t) \rightarrow f(t+t_0) \quad \text{左加右减}$$

3. 反转

$$\text{以纵轴为对称轴反转} \quad f(-t)$$

4. 尺度变化

$$f(t) \rightarrow f(\omega t) \quad \text{横坐标乘} \frac{1}{\omega}$$

例 $f(-2t+3)$

$$f(t) \rightarrow f(t+3) \quad \text{左3}$$

$$f(t+3) \rightarrow f(-t+3) \quad \text{翻转}$$

$$f(-t+3) \rightarrow f(-2t+3) \quad \text{横坐标乘} \frac{1}{2}$$

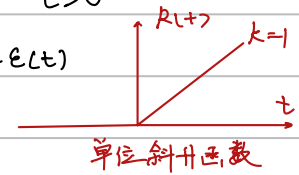
$$0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

离散: $f(k) \rightarrow f(2k) \quad \text{取点}$
 $f(k) \rightarrow f(\frac{1}{2}k) \quad \text{插点}$

四. 阶跃函数, 冲激函数

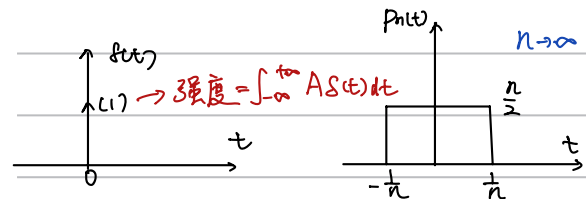
$$\text{阶跃函数: } \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{积分: } \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau = t \cdot \varepsilon(t)$$

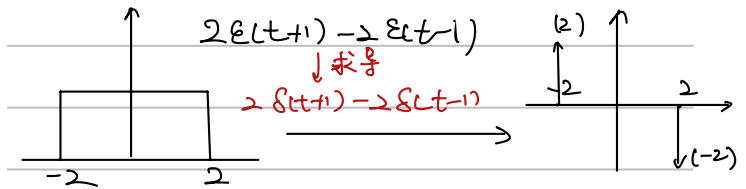


冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$



$$\text{关系: } \delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



△ 冲激函数的性质

$$\text{① 相乘取样} \quad f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$

$$f(t) \cdot \delta(t-a) = f(a) \cdot \delta(t-a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

$$\text{② 导数} \quad f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t) - f'(0) \cdot \delta(t)$$

$$\text{证 } [f(t) \cdot \delta(t)]' = f'(t) \cdot \delta(t) + f(t) \cdot \delta'(t)$$

$$f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t) - f'(0) \cdot \delta(t)$$

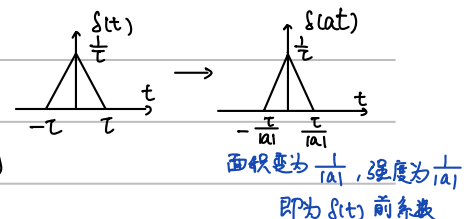
$$\text{定义 } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = (-1)^n \cdot f^{(n)}(0)$$

③ 尺度变换

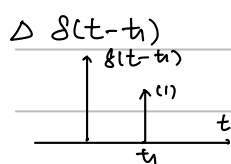
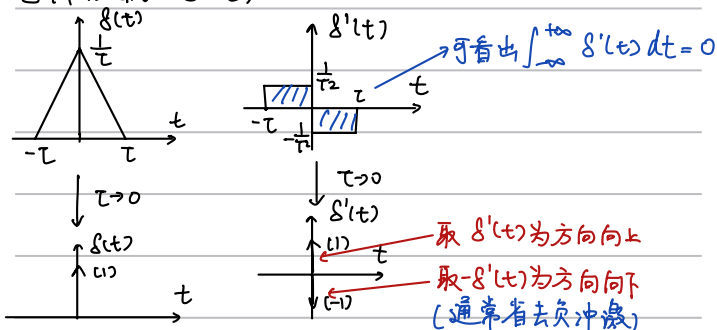
$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\delta(at-a) = \frac{1}{|a|} \delta(t-\frac{a}{a})$$

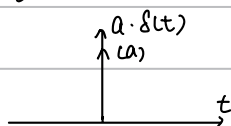


$$\delta^{(n)}(-t) = (-1)^n \cdot \delta^{(n)}(t)$$

△冲激偶 $\delta'(t)$

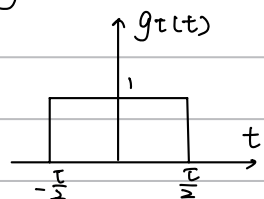


$a \cdot \delta(t)$



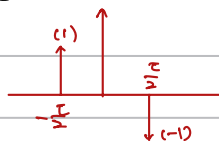
门宽

$g_T(t)$ — 门函数



表达式 $g_T(t) = \varepsilon(t + \frac{T}{2}) - \varepsilon(t - \frac{T}{2})$

求导



△ $\delta(t)$ 积分

$$t < 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 0$$

$$t > 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1$$

$$\text{因此 } \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon'(t) = \delta(t) = 0 \quad t < 0 \text{ 或 } t > 0$$

$t=0$ 时, 跳跃间断点求导时, 出现冲激信号

$$\text{冲激强度} = f(t_0^+) - f(t_0^-)$$

$$\Delta \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) \varphi(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \quad \text{去阶跃函数, 改积分限}$$

$$\Delta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot \delta'(t) dt = -\varphi'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n \cdot \varphi^{(n)}(0)$$

△ 位移

$$f(t) \cdot \delta(t-t_1) = f(t_1) \cdot \delta(t-t_1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_1) dt = f(t_1)$$

$$f(t) \cdot \delta'(t-t_1) = f(t_1) \cdot \delta'(t-t_1) - f'(t_1) \cdot \delta(t-t_1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta'(t-t_1) dt = -f'(t_1)$$

$$\Delta \delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \cdot \delta'(t) \quad \text{推导 } \delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

$$\delta^{(n)}(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a^n} \delta^{(n)}(t)$$

$$\delta^{(n)}(-t) = (-1)^n \cdot \delta^{(n)}(t)$$

n 为奇数 $\delta^{(n)}(-t) = -\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t)$ 为奇函数

n 为偶数 $\delta^{(n)}(-t) = \delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t)$ 为偶函数

△ 复合函数求导

$$\delta^{(n)}[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t-t_i)$$

① 求 $f(t)$ 零点 $t_1, t_2, \dots, t_n$

② 求 $f'(t_i)$

③ 求 $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$

④ 代入公式

△ $\delta(k)$ 与 $\varepsilon(k)$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

公式总结:

- ① $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$
- ② $\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$
- ③ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot \delta'(t) dt = -\varphi'(0)$
- ④ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot \delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n \cdot \varphi^{(n)}(0)$
- ⑤ $\delta(t) = \varepsilon'(t)$
- ⑥ $\int_{-\infty}^t \varepsilon(t) dt = t \cdot \varepsilon(t)$
- ⑦ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
- ⑧ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) dt = 0$
- ⑨ $f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$
- ⑩ $f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t) - f'(0) \cdot \delta(t)$

五. 系统的描述

△ 方程

连续动态系统 —— 微分方程 $y(t) = f'(t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

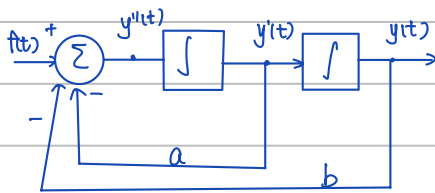
离散动态系统 —— 差分方程

△ 框图

积分器, 加法器, 数乘器

延时器 $f(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow f(t-T)$

$$y''(t) = f(t) - ay'(t) - by(t)$$



△ 差分方程

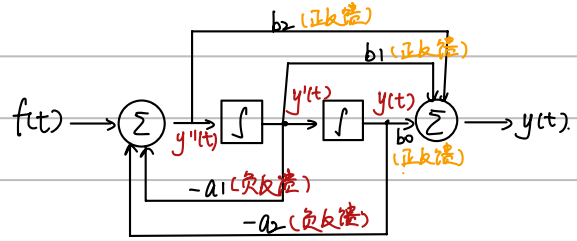
前向: $x(k)$ 与 $x(k-1)$

后向: $x(k)$ 与 $x(k+1)$

差分器 $f(k) \rightarrow \boxed{D} \rightarrow f(k-1)$

△ 框图与微分/差分方程相互转化

微分方程: 最高阶求导次数 = 积分器个数



$$y''(t) - a_1 y'(t) - a_2 y(t) = b_2 f'(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

六. 系统的特性与分析方法

△ 连续系统/离散系统

△ 动态系统/即时系统

△ 线性性质

$$T[a f(\cdot)] = a [T[f(\cdot)]] \quad \text{齐次性}$$

$$T[f_1(\cdot) + f_2(\cdot)] = T[f_1(\cdot)] + T[f_2(\cdot)] \quad \text{可加性}$$

△ 动态系统是线性系统的条件

分解特性

可分为内、外部激励, 零输入 + 零响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

零输入 零响应

分解特性 + 零输入零状态线性 = 线性系统

非线性

$$① y(t) = f(t) + A$$

$$② y(t) = f(t) \text{ 高次方}$$

$$③ y(t) = |f(t)| \text{ 含绝对值}$$

$$④ y(t) = g[f(t)]$$

△ 时不变系统与时变系统

def. 输入延迟 t_0 , 零状态响应延迟 t_0 (移位不变性)

$$\text{时变: } y(t) = f(at+b) \quad (a \neq 1)$$

$$y(t) = m(t) \cdot f(t)$$

$$y(t) = f(t) + m(t)$$

△ LTI 系统的微分与积分特性

① $f(t) \rightarrow y_{zs}(t)$, 则 $f'(t) \rightarrow y'_{zs}(t)$

② $f(t) \rightarrow y_{zs}(t)$, $f(-\infty)=0$, $y_{zs}(-\infty)=0$

则 $\int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^t y_{zs}(x) dx$

△ 因果系统与非因果系统

因果系统: 零状态响应不会出现在激励之前

$t < t_0$, $f(t)=0$, $y_{zs}(t)=0$

△ 稳定系统与不稳定系统

$|f(t)| < \infty$ (有界), 则 $|y_{zs}(t)| < \infty$ (有界)

△ LTI 系统的分析方法

输入输出 (外部) 状态变量 (内部)